

Tantárgy:	Matematika (emelt)
------------------	--------------------

Évfolyam:	11.
------------------	-----

Időkeret:	6	óra/hét	216	óra/év
------------------	----------	----------------	------------	---------------

Témakörök óraszámai:

Témakör neve	Javasolt óraszám
Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése	14
Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus	18
Exponenciális folyamatok vizsgálata	18
Trigonometria	54
Koordinátageometria	38
Sorozatok	30
Az egyváltozós valós függvények analízisének elemei	44
Összes óraszám:	216

TÉMAKÖR: SZÁMELMÉLETI ISMERETEK, SZÁMHALMAZOK ÉPÜLÉSE

ÓRASZÁM: 14 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám);
- bizonyítja, hogy végtelen sok prímszám van
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- megfogalmazza a számelmélet alaptételét
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- meghatározza a természetes számok pozitív osztóinak számát
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat (2,3,4,5,6,8,9 számokra);
- megold összetett oszthatósági feladatokat
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényező felbontásból
- Természetes számok pozitív osztóinak számának meghatározása
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Relatív prímszámok definiálása és alkalmazása
- Végtelen sok prímszám létezésnek bizonyítása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
- Számok átírása 10-estől különböző alapú számrendszerbe ($n \leq 9$) és viszont
- 10-estől különböző alapú ($n \leq 9$) számrendszerben felírt számok összeadását, kivonását elvégzi
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Számhalmazok műveleti zártsága

FOGALMAK

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímelek, számelmélet alaptétele

TEVÉKENYSÉGEK

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

TÉMAKÖR: HATVÁNY, GYÖK, EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY, LOGARITMUS

ÓRASZÁM: 18 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát, valamint a logaritmus azonosságait.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az n -edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;

- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az n -edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- Permanencia elv ismerete
- Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- A logaritmus értelmezése
- Áttérés más alapú logaritmusra
- A szorzat, a hányados és a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságok és a más alapú logaritmusra való áttérés szabályának bizonyítása
- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához
- A logaritmus függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- Az inverzfüggvény fogalmának ismerete és alkalmazása
- Definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő exponenciális és logaritmosos egyenletek megoldása
- Összetett exponenciális és logaritmosos egyenletek, egyenletrendszerek megoldása
- Exponenciális és logaritmosos egyenlőtlenségek megoldása

FOGALMAK

permanencia elv, n -edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus, logaritmus függvény, inverzfüggvény

TEVÉKENYSÉGEK

- A permanencia elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel

TÉMAKÖR: EXPONENCIÁLIS FOLYAMATOK VIZSGÁLATA

ÓRASZÁM: 18 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

FOGALMAK

Nincsenek új fogalmak.

TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban
- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában

- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

TÉMAKÖR: TRIGONOMETRIA

ÓRASZÁM: 54 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza függvénytáblázat segítségével egyszerű feladatokban az addíciós összefüggéseket
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- kiszámítja háromszögek területét;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét
- ismeri, bizonyítja és alkalmazza a szabályos sokszögek területképleteit

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Nevezetes szögek (30° , 45° , 60°) szögfüggvényei
- Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense
- Szögfüggvények általános definíciója
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszí összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- A szinusz, koszinusz, tangens függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai (periodicitás)
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében, az összefüggés bizonyítása
- Szinusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- A szinusztétel és a koszinusztétel bizonyítása
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása

- Definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő trigonometrikus egyenletek megoldása
- Másodfokúra visszavezethető és az azonosságok alkalmazásával megoldható egyenletek megoldása
- Trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása

FOGALMAK

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel, periodicitás

TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

TÉMAKÖR: KOORDINÁTAGEOMETRIA

ÓRASZÁM: 38 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- meghatározza koordinátákkal adott vektorok hajlásszögét;
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- meghatározza kör és egyenes kölcsönös helyzetét és metszéspontjainak koordinátáit
- felírja a kör adott pontjában húzott érintő egyenletét és külső pontból a körhöz húzott érintőegyenleteket
- meghatározza két kör kölcsönös helyzetét és metszéspontjainak koordinátáit
- levezeti a parabola $x^2 = 2py$ alakú egyenletét
- megold koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolákkal feladatokat
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor és vektor 90° -os elforgatottjának megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
- Skaláris szorzat definíciója, tulajdonságai, skaláris szorzat kiszámítása vektorok koordinátáiból, erre vonatkozó tétel bizonyítása
- Koordinátákkal adott vektorok hajlásszögének meghatározása
- Egyértelmű vektorfelbontás tétele
- Szakaszfelezőpont és harmadolópont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- Szakaszfelezőpont és harmadolópont koordinátáinak meghatározására vonatkozó összefüggések bizonyítása
- Szakasz $n : m$ arányú osztópontjának koordinátáira vonatkozó összefüggés alkalmazása
- Háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggés ismerete, bizonyítása, alkalmazása
- Egyenes egyenlete $y = mx + b$ vagy $x = c$ alakban, különböző adatokkal meghatározott egyenesek egyenlete
- Különböző kiindulási adatokból az egyenes egyenletének levezetése síkban
- Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
- Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái
- Síkbeli egyenesek hajlásszögének meghatározása
- A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében
- Kör egyenletének levezetése
- Kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontjának és sugarának meghatározása
- Kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolatának ismerete
- Kör és egyenes metszéspontjának meghatározása
- A kör adott pontjában húzott érintő egyenletének felírása
- Két kör kölcsönös helyzetének és metszéspontjait
- Külső pontból húzott érintőegyenletének felírása
- Parabola $x^2 = 2py$ alakú egyenletének levezetése
- Koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolákkal feladatok megoldása

FOGALMAK

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, két vektor skaláris szorzata, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete, parabola egyenlete

TEVÉKENYSÉGEK

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordináta geometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában
- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusán, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

TÉMAKÖR: SOROZATOK

ÓRASZÁM: 30 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a (logaritmus) sorozat fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
- a számtani/mértani sorozat n -edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
- a számtani/mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Sorozatot jellemez (korlátosság, monotonitás)
- Ismeri a konvergencia szemléletes fogalmát
- Ismeri és alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozat definícióját
- Alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételeket
- Ismeri a végtelen mértani sor fogalmát és összegét

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A számsorozat fogalmának ismerete
- Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
- Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint
- Számtani sorozat, az n -edik tag, az első n tag összege
- Mértani sorozat, az n -edik tag, az első n tag összege

- A számtani és a mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggések és az első n tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
- Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
- Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjárdék és törlesztőrészlet számítása
- Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása
- Sorozat jellemzése (korlátosság, monotonitás)
- Konvergencia szemléletes fogalmának ismerete.
- Egyszerű sorozatokban a konvergens sorozat definíciójának ismerete és alkalmazása.
- Egyszerű sorozatokban a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételek alkalmazása
- Végtelen mértani sor fogalma és végtelen mértani sor összege

FOGALMAK

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjárdék, törlesztőrészlet, konvergencia, végtelen mértani sor

TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
- Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
- A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
- Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével

TÉMAKÖR: AZ EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISÉNEK ELEMEI

ÓRASZÁM: 46 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- Ismeri a végesben vett véges, a végtelenben vett véges és a tágabb értelemben vett határérték szemléletes fogalmát.
- Ismeri a folytonosság szemléletes fogalmát.
- Tudja a differencia- és differenciálhányados definícióját.
- Alkalmazza az összeg-, a különbség-, a konstansszoros, a szorzat- és a hányadosfüggvény deriválási szabályait.
- Alkalmazza egyszerű esetekben az összetett függvény deriválási szabályát. Tudja bizonyítani, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$ esetén).
- Ismeri a trigonometrikus függvények deriváltját.
- Alkalmazza a differenciálszámítást érintő egyenletének felírására, szélsőérték-feladatok megoldására és polinomfüggvények vizsgálatára (monotonitás, szélsőérték, konvexitás).

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A végesben vett véges, a végtelenben vett véges és a tágabb értelemben vett határérték szemléletes fogalmának ismerete
- A folytonosság szemléletes fogalmának ismerete
- A differencia- és differenciálhányados értelmezése
- Az összeg-, a különbség-, a konstansszoros, a szorzat- és a hányadosfüggvény deriválási szabályainak alkalmazása
- Egyszerű esetekben az összetett függvény deriválási szabályának alkalmazása
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}$ esetén) bizonyítása
- A trigonometrikus függvények deriváltjának ismerete
- A differenciálszámítást alkalmazza érintő egyenletének felírására, szélsőérték-feladatok megoldására és polinomfüggvények vizsgálatára (monotonitás, szélsőérték, konvexitás).

FOGALMAK

függvény határértéke, folytonossága, differencia- differenciálhányados, polinomfüggvény

TEVÉKENYSÉGEK

–